

Cuantizarea ideală și zgomotul de cuantizare

Prin definiție ([1]), cuantizarea este împărțirea unei cantități într-un număr de părți, adesea multipli întregi ai unei cantități de bază. Cel mai cunoscut exemplu de cuantizare este *rotunjirea*, prin care oricare număr real x este aproximat prin, *rotunjit la*, cel mai apropiat număr întreg, fie acesta $q(x)$, rezultând o eroare de cuantizare $e(x)=q(x)-x$. Mai general, un *cuantizor* se poate defini drept constând dintr-un set de *intervale* $S = \{S_i, i \in I\}$, unde setul de indecși I este în mod obișnuit o colecție de Q întregi consecutivi începînd cu 0 sau 1, împreună cu un set de *nivele* $C = \{y_i, i \in I\}$. Cu alte cuvinte, cuantizor poate fi definit prin relația $q(x)=y_i$ pentru $x \in S_i$, sau mai concis ca:

$$q(x) = \sum_i y_i 1_{S_i}(x)$$

unde :

$$1_{S_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_i \\ 0 & x \notin S_i \end{cases} \quad (1)$$

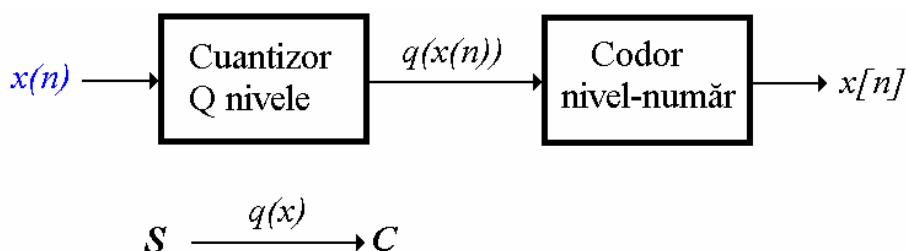


Figura 1

Pentru ceea ce interesează în cazul de față se presupune că S este o partiție a axei reale, și că în general $S_i = (a_{i-1}, a_i]$ unde *pragurile* a_i formează o secvență crescătoare ca în exemplul din figura 2-(a) în care $Q=5$. Mărimea unui interval de cuantizare este $a_i - a_{i-1}$, iar funcția $q(x)$ este denumită adesea ca *regula de cuantizare*. Definiția generală a cuantizării se reduce la o operație de rotunjire dacă de exemplu $S_i = (i\Delta - \Delta/2, i\Delta + \Delta/2]$ și $y_i = i\Delta$. În acest caz, întrucît nivelele y_i sînt echidistante, cuantizarea este *uniformă* iar pragurile a_i se află la jumătatea distanței Δ dintre nivelele adiacente. Pentru un număr finit Q de nivele intervalele extreme sînt semiinfinite, în ele eroarea de cuantizare fiind nelimitată, fapt pentru care aceste regiuni se numesc *zone de saturație*.

Un exemplu de cuantizare uniformă cu 9 nivele este redat în figurile 2-(b) și 2-(c). Codarea nivel-număr este realizată prin împărțirea nivelelor y_i la pasul de cuantizare Δ . Eroarea de cuantizare $e(x(n))$ este reprezentată pentru variația semnalului de intrare x între $-\infty$ și $+\infty$ (indiferent de legea sa de variație în timp). Saturarea cuantizorului apare de îndată ce modulul semnalului x depășește valoarea V .

Echipamente Radio Definite prin Program si Virtuale

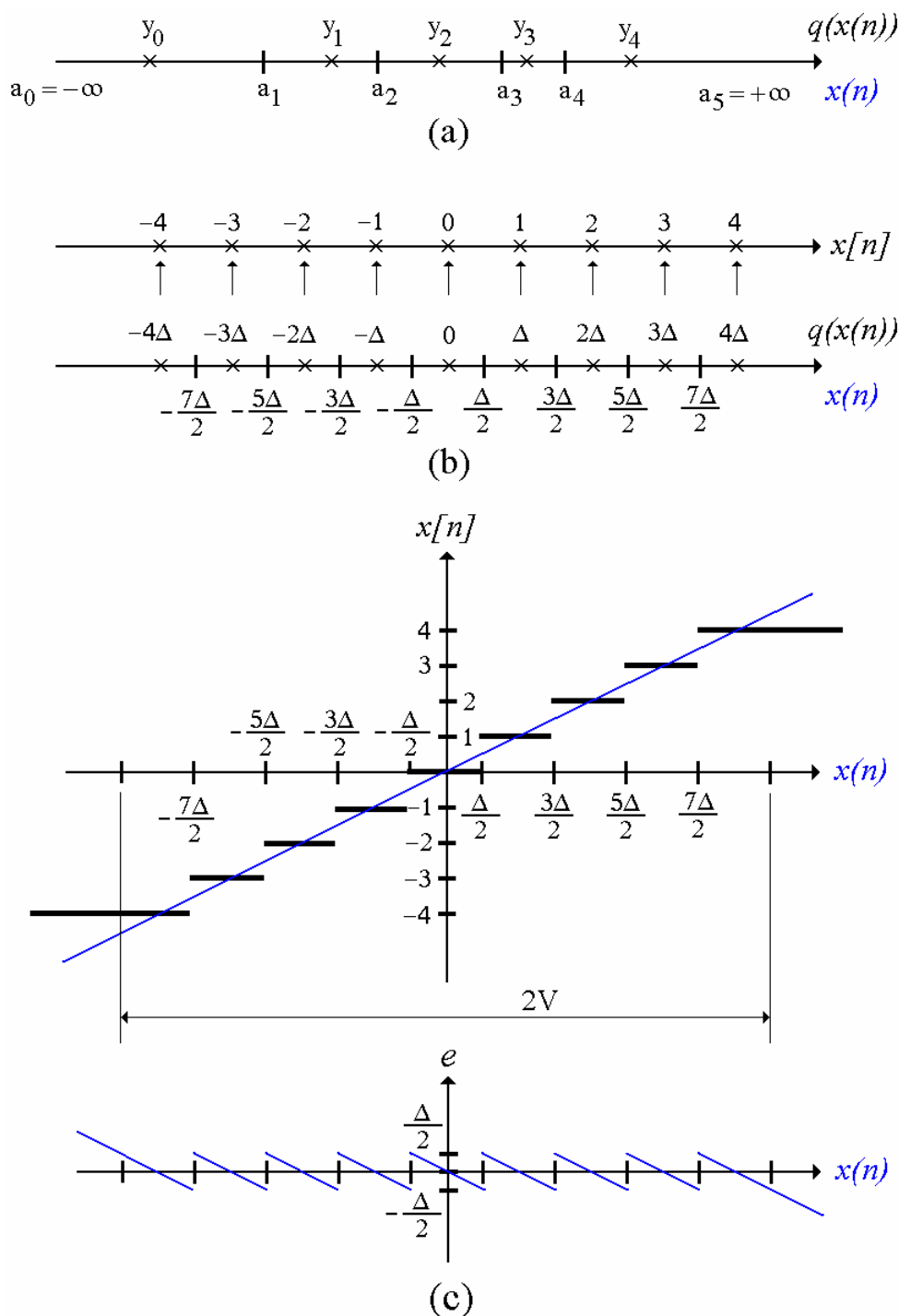


Figura 2

Numerele întregi cu semn corespunzătoare eșantioanelor de semnal sînt reprezentate uzual în blocurile de calcul în virgulă fixă, limbajele de programare de nivel înalt, cum este C++, alocînd cîte 16 biți pentru memorarea fiecărui întreg (eșantion). Conversiunile analog-numerice practice, codează nivelele în numere $x[n]$ întregi reprezentate binar, cu N biți. În

Echipamente Radio Definite prin Program si Virtuale

ceea ce privește formatul numerelor binare, acesta nu este unic, după cum exemplifică tabelul 1 pentru cazul unui convertor de $N=4$ biți.

Întregi cu semn	Binar deplasat	Semn și mărime	Complement față de 2
8	1111	-----	-----
7	1110	0111	0111
6	1101	0110	0110
5	1100	0101	0101
4	1011	0100	0100
3	1010	0011	0011
2	1001	0010	0010
1	1000	0001	0001
0	0111	0000	0000
0	-----	1000	-----
-1	0110	1001	1111
-2	0101	1010	1110
-3	0100	1011	1101
-4	0011	1100	1100
-5	0010	1101	1011
-6	0001	1110	1010
-7	0000	1111	1001
-8	-----	-----	1000

Tabelul 1

Formatul **binar deplasat** este asemănător modului de codare binar naturală a numerelor întregi fără semn, cu excepția faptului că valorile întregi sînt deplasate (cu 7 în exemplul din tabelul 1) pentru a permite și codarea numerelor întregi negative. În felul acesta, o reprezentare pe 16 biți împreună cu folosirea unei deplasări cu 32.767 conduce la domeniul de valori întregi între -32.767 și 32.768 . Mărimea deplasării nu este standardizată, întâlnindu-se cazuri în care se lucrează cu 32.768.

Un alt format simplu este cu **semn și mărime**. Bitul din extrema stîngă a reprezentării binare este denumit *bit de semn*, el avînd valoarea 0 în cazul numerelor întregi pozitive și valoarea 1 în cazul celor negative. Ceilalți biți sînt de fapt o codare binar naturală a valorii absolute a numărului întreg. Această regulă conduce la irosirea unui nivel, întrucît există două reprezentări binare pentru valoarea întregă *zero*, anume 0000...0 (*zero* pozitiv) și 1000...0 (*zero* negativ). O reprezentare pe 16 biți corespunde domeniului întreg, simetric, între -32.767 și 32.767 .

Cele două codări binare anterioare, deși conceptual simple, s-au dovedit dificil de implementat la nivelul blocurilor aritmetice din circuite. În proiectarea acestor blocuri s-a generalizat formatul binar în **complement față de 2**, format în care bitul din extrema stîngă este tot un *bit de semn*, ca și în formatul cu **semn și mărime**. Numerele întregi pozitive sînt reprezentate binar natural, iar pentru reprezentarea celor negative se folosește următorul algoritm:

- se extrage valoarea absolută a numărului întreg;

Echipamente Radio Definite prin Program si Virtuale

- se reprezintă valoarea absolută în format binar natural;
- se completează toți biții (valorile 0 sînt înlocuite cu valori de 1 și invers);
- se adună binar 1.

Cu 16 biți, acest format acoperă domeniul de întregi între -32.768 și 32.767 .

Chiar pentru un cuantizor ideal, problema cea mai delicată o reprezintă zgomotul de cuantizare $e(x(n))$, prin dependența sa complicată față de semnalul de intrare, numărul nivelelor de cuantizare și frecvența de eșantionare. Efectul unui cuantizări uniforme poate fi dese ori modelat printr-un zgomot aditiv, care este uniform distribuit, necorelat cu semnalul de intrare și avînd un spectru alb.

Așa cum este redat și în exemplul din figura 3, în afara condiției de saturare (adică în interiorul domeniului $[-V, +V]$) zgomotul de cuantizare este limitat la intervalul $\pm \Delta/2$. Ipoteza unui zgomot de cuantizare alb este dovedită acceptabilă în următoarele condiții([2]):

- numărul nivelelor de cuantizare acoperite de eșantioanele semnalului este mare;
- cît mai multe dintre eșantioanele consecutive diferă între ele prin multe nivele de eșantionare;
- frecvența semnalelor sinusoidale nu se află într-un raport întreg cu frecvența de eșantionare ([3]).

În aceste condiții, pe fiecare perioadă de eșantionare zgomotul de eșantionare tinde să aibe o variație în timp de tip “dinți de fierăstrău”, ca în figura 2-(c), cu o valoare eficace:

$$\sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \left[\Delta \left(\frac{t}{T_s} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 dt} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{V}{2^{N-1} \sqrt{12}} \quad (2)$$

Semnalele de intrare de radiofrecvență au pe intervale de timp scurt un comportament sinusoidal, cu o valoare eficace care nu va trebui să depășească limita peste care convertorul intră în saturație $V/\sqrt{2}$. Pentru semnalele de nivel maxim raportul semnal-zgomot de cuantizare, RSZ_q , capătă expresia (3).

$$RSZ_q = 20 \log_{10} \left(\frac{V}{\sqrt{2}} \frac{1}{\frac{V}{2^{N-1} \sqrt{12}}} \right) = 6,02N + 1,76 \quad [dB] \quad (3)$$

În acest model simplu, al zgomotului de cuantizare alb, puterea de zgomot nu depinde de frecvența de eșantionare și este uniform distribuită în prima zonă Nyquist ([2]). Prin urmare, supraeșantionînd semnalul de intrare și apoi recuperîndu-l ca în figura 4, printr-un filtru în care să treacă numai banda semnalului B , se obține o îmbunătățire a raportului semnal-zgomot de cuantizare cu 3dB la fiecare dublare a frecvenței de eșantionare.

Echipamente Radio Definite prin Program si Virtuale

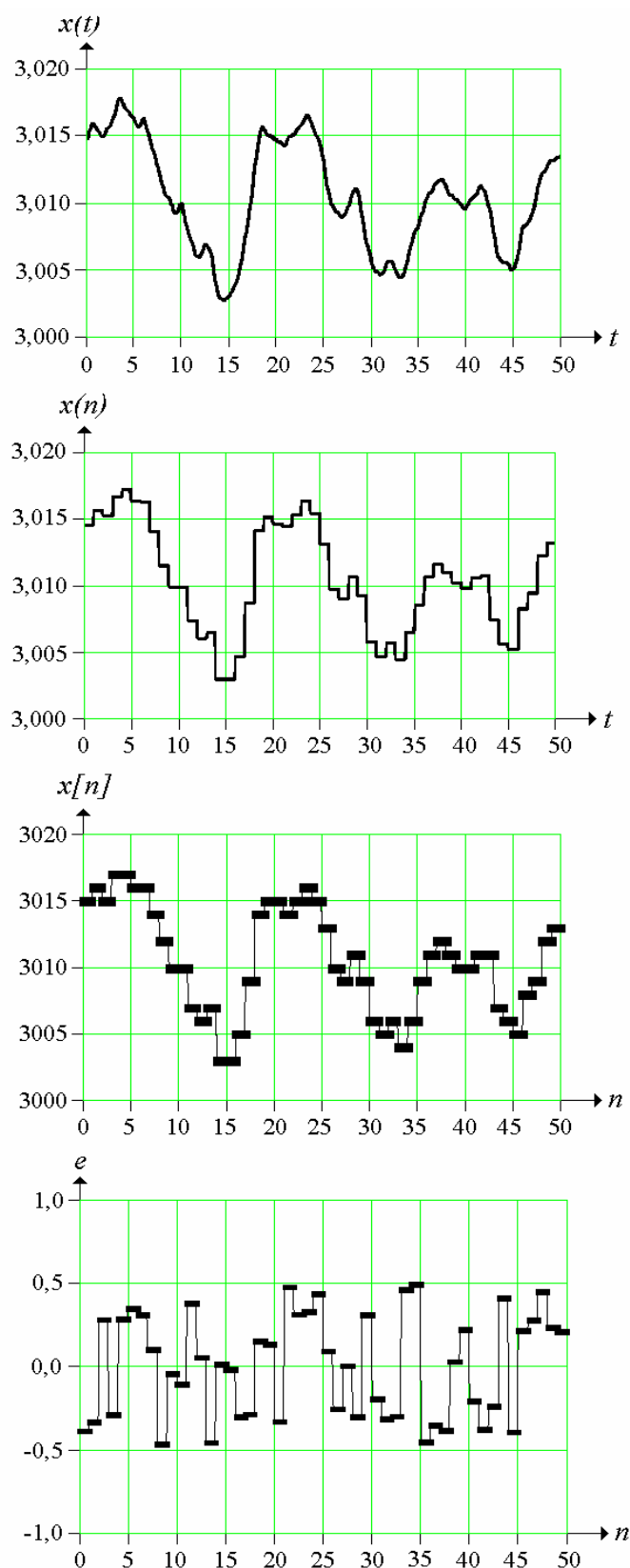


Figura 3

Echipamente Radio Definite prin Program si Virtuale

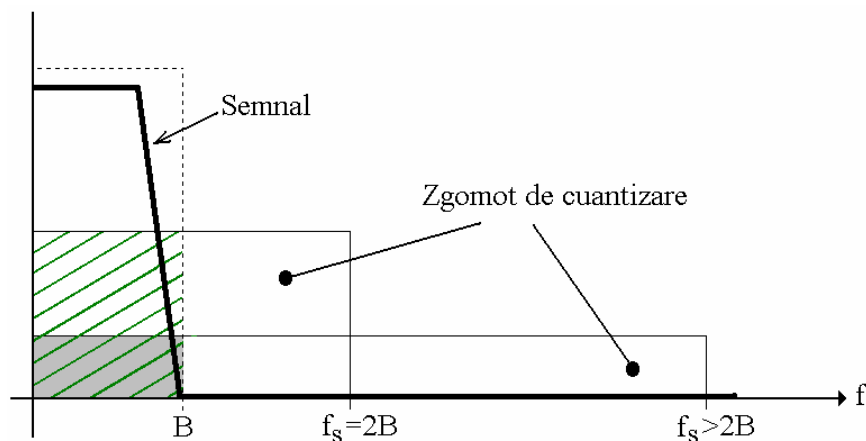


Figura 4

$$RSZ_q = 6,02N + 1,76 + 10\log_{10}\left(\frac{f_s}{2B}\right) \text{ [dB]} \quad (4)$$

Cînd se cuantizează semnale periodice sînt îndeplinite condiții ca puterea zgomotului de cuantizare să se concentreze în jurul unor frecvențe discrete. Pentru astfel de semnale spectrul de frecvențe al zgomotului de cuantizare se poate determina analitic plecînd de la dezvoltarea în serie Fourier a dependenței generale a zgomotului de valorile semnalului de intrare, ilustrată grafic în figura 2-(c).

$$e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi x) \quad (5)$$

Dacă semnalul de intrare este o simplă sinusoidă cu amplitudine A și frecvență f_c

$$x(t) = A \sin(2\pi f_c t)$$

eroarea de cuantizare este ([2]):

$$\begin{aligned} e(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin[2n\pi A \sin(2\pi f_c t)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(2n\pi A) \sin[2\pi(2k+1)f_c t] \end{aligned} \quad (6)$$

Astfel, eroarea de cuantizare ideală pentru semnale sinusoidale are numai componente armonice impare (datorate simetriei impare a caracteristicii de transfer) a căror amplitudini sînt date de sume de funcții Bessel. Rezultatul este de așteptat întrucît semnalul de intrare produce o modulație în frecvență a erorii în “dinți de fierăstrău”. Cînd amplitudinea A este mare, semnalul de intrare traversează multe nivele de cuantizare și spectrul (6) rezultat este aproximativ alb, justificînd (4).

Echipamente Radio Definite prin Program si Virtuale

Chiar dacă amplitudinea semnalului sinusoidal este mare, spectrul zgomotului de cuantizare este discret dacă există un raport întreg între frecvența de eșantionare și cea a semnalului de intrare, așa cum arată exemplele de simulare din figura 5 în care frecvența de eșantionare este 48kHz (spectrele au fost obținute din 512 eșantioane supuse unei ferestre temporare Blackman).

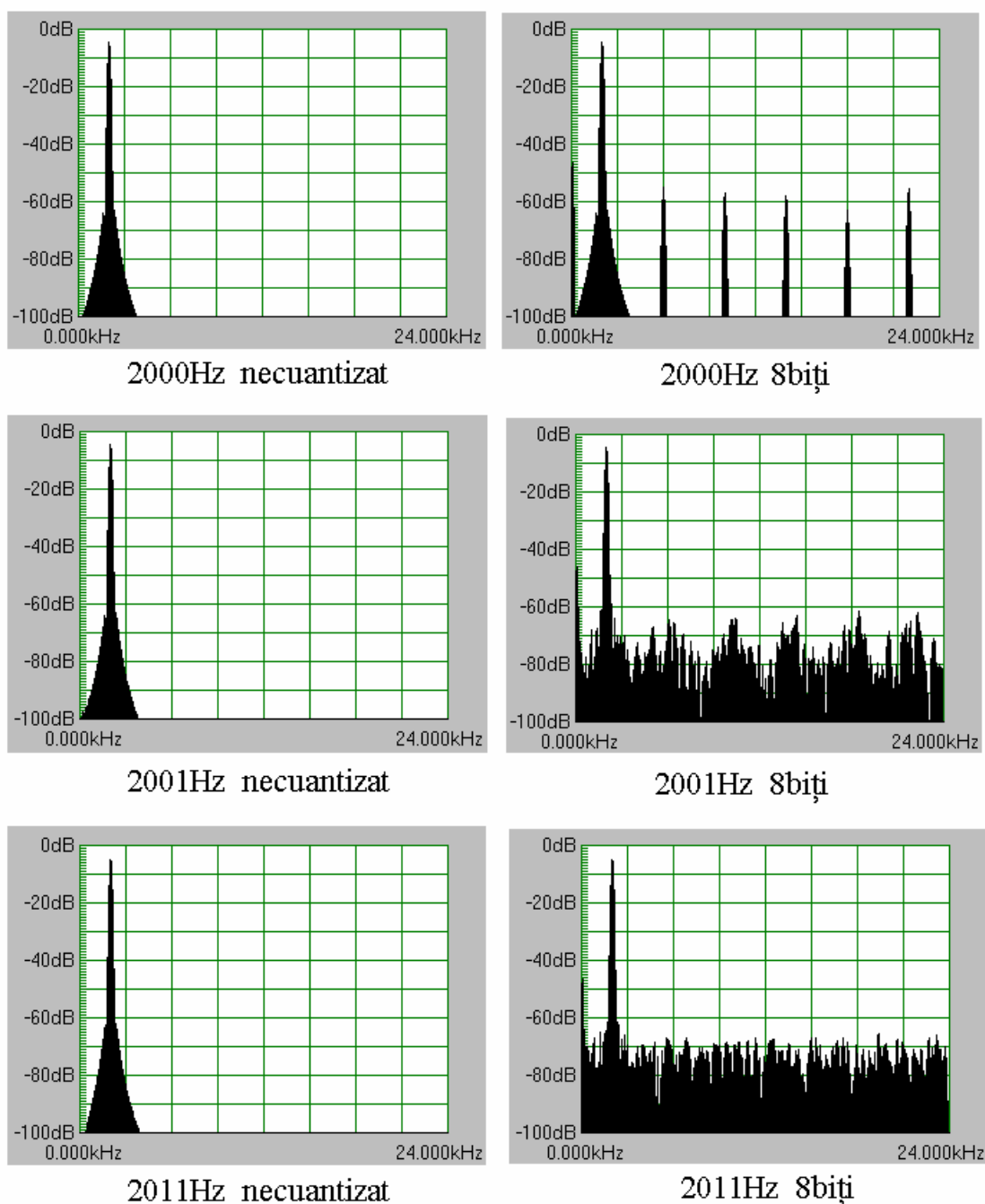


Figura 5

Echipamente Radio Definite prin Program si Virtuale

Dacă frecvența semnalului de intrare este puțin modificată față de un raport întreg (24 în acest caz) aspectul spectrului se schimbă progresiv, puterea concentrată la frecvențele armonice impare ale semnalului de intrare începînd să se împrăștie în toată banda Nyquist.

BIBLIOGRAFIE

- [1] - Robert M. Gray, David L. Neuhoff, ”*Quantization*”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 44, no. 6, October 1998
- [2] - Brian L. Fox, “*Analysis and dynamic range enhancement of the analog-to-digital interface in multimode radio receivers*”, Virginia Polytechnic Institute, 1997
- [3] - Pablo R. Perez-Alcazar, Andres Santos, “*Relationship between sampling rate and quantization noise*”, Instituto de Ingenieria, UNAM, Mexico

